

CONTENUTI DISCIPLINARI DI MATEMATICA

PER LA CLASSE V SEZ. C

Libro di testo: Bergamini M., Trifone A., Barozzi G., *Matematica.blu 2.0* 2a ed., vol. 5 - Zanichelli (ISBN 978-88-08-86500-7).

Gli argomenti seguiti dall'* sono stati presentati con dimostrazione.

ARGOMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Introduzione: Nozioni di teoria degli insiemi, in particolare insiemi numerici \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , cardinalità di un insieme, insieme vuoto e sua cardinalità. Insiemi equipotenti. Insiemi finiti e infiniti. Cardinalità di \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} . Equipotenza di \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} . Metodo diagonale di Cantor. Insiemi numerabili e non numerabili. Ipotesi del continuo e ipotesi del continuo generalizzata: gerarchia degli \aleph_k . Operazioni sugli insiemi (unione, intersezione, insiemi disgiunti, differenza, inclusione, complementare, prodotto cartesiano e sua cardinalità, insieme delle parti e sua cardinalità) e loro proprietà. Intervalli di \mathbb{R} limitati e non limitati. Maggioranti e minoranti di un insieme. Estremo superiore ed estremo inferiore di insiemi limitati e non limitati. Minimo e massimo di un insieme. Intorni di numeri reali e di $+\infty$, $-\infty$ e ∞ , intorni destri e sinistri di numeri reali. Punti di accumulazione e isolati di un insieme. Punti di accumulazione a destra e a sinistra. Derivato di un insieme. Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Funzioni reali di variabile reale: Definizione di funzione secondo Dirichlet. Variabili indipendente e dipendente. Dominio, codominio e insieme delle immagini di una funzione. Funzioni iniettive, suriettive, biettive. Funzioni composte. Funzione inversa e relative proprietà. Funzioni monotone crescenti e decrescenti (strettamente e non strettamente). Funzioni pari e dispari. Funzioni periodiche.

Funzioni elementari e loro grafici: Dominio, insieme delle immagini e grafico per le funzioni potenza n -esima $y = x^n$, radice n -esima $y = \sqrt[n]{x}$ e potenza ad esponente negativo $y = x^{-n}$ (casi n pari ed n dispari). Funzioni esponenziale $y = a^x$ e logaritmica $y = \log_a x$ (casi $0 < a < 1$ e $a > 1$). Funzioni goniometriche dirette: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Funzioni goniometriche inverse: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Funzione valore assoluto $y = |x|$. Caso particolare delle funzioni: successioni di numeri reali. Determinazione del dominio di una funzione. Disequazioni in due variabili, dominio delle funzioni in due variabili (cenni).

Limiti di funzioni e continuità: Concetto di limite di una funzione. Definizione topologica. Caratterizzazione metrica della definizione topologica nei vari casi (compresi limiti a destra e sinis-

tra e limiti di successioni). Proprietà di separazione in \mathbb{R}^* . Teorema di unicità del limite*. Teorema del confronto (dei Carabinieri)*, Teorema della permanenza del segno*. Operazioni con i limiti: limite della somma algebrica di funzioni, limite del prodotto di una costante per una funzione, limite del prodotto e del rapporto di due funzioni. Forme indeterminate. Limiti di funzioni composte. Limiti fondamentali: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1^*$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1^*$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha^*$. Infinitesimi ed infiniti e loro confronto, ordine di un infinitesimo e di un infinito, infinitesimo principale, teorema di sostituzione e teorema di eliminazione. Infinitesimi equivalenti. Parte principale di un infinitesimo. Ordine di infinitesimo della somma, della differenza, e del prodotto di funzioni, ordine di infinitesimo della potenza e del rapporto. Definizione di funzione continua in un punto e in un insieme. Continuità delle funzioni elementari. Continuità delle funzioni composte. Teorema di Weierstrass. Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi (di Bolzano). Punti di discontinuità di una funzione e loro classificazione, salto di una funzione nel caso di discontinuità di prima specie. Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui di una funzione.

Calcolo differenziale: Introduzione storica alla nascita del calcolo differenziale: il problema della determinazione della tangente ad una curva e del calcolo della velocità istantanea di un corpo in movimento. Definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto. Definizione di derivata. Significato geometrico del rapporto incrementale e della derivata di una funzione. Equazione della tangente al grafico di una funzione. Derivata destra e sinistra. Teorema di continuità di una funzione derivabile*. Regole di derivazione del prodotto di una costante per una funzione*, della somma algebrica di funzioni*, del prodotto di due funzioni*, del reciproco di una funzione*, del rapporto di due funzioni*. Derivate delle funzioni elementari: $y = k^*$, $y = x^{\alpha^*}$, $y = \sin x^*$, $y = \cos x^*$, $y = \operatorname{tg} x^*$, $y = \operatorname{ctg} x^*$, $y = e^{x^*}$, $y = \ln x^*$, $y = |x|^*$. Teorema di derivazione delle funzioni composte. Teorema di derivazione delle funzioni inverse. Derivate delle funzioni goniometriche inverse: $y = \arcsin x^*$, $y = \arccos x^*$, $y = \operatorname{arctg} x^*$, $y = \operatorname{arcctg} x^*$. Derivata della funzione $(f(x))^{g(x)^*}$. Punti di non derivabilità: cuspidi, punti angolosi, flessi a tangente verticale. Derivate di ordine superiore. Differenziale.

Teoremi del calcolo differenziale: Teoremi di Rolle e Lagrange* e loro significato geometrico. Conseguenze del teorema di Lagrange: funzioni a derivata nulla in un intervallo, differenza di due funzioni aventi la stessa derivata, derivata e monotonia. Teorema di Cauchy*. Primo e secondo teorema di De l'Hospital. Riduzione delle varie forme indeterminate a quelle per cui sono applicabili

i teoremi di De l'Hospital. Massimi e minimi relativi (propri e non). Massimi e minimi assoluti. Punti stazionari. Ricerca di massimi e minimi assoluti. Problemi di massimo e minimo. Definizione di concavità, convessità e punti di flesso di una funzione. Condizioni sufficienti per la determinazione della concavità. Condizioni sufficienti per la determinazione dei flessi di una funzione. Studio di funzione.

Calcolo integrale: Introduzione storica alla nascita del calcolo integrale: il problema delle aree e della determinazione della posizione di un corpo in movimento nota la sua velocità istantanea. Suddivisione di un intervallo. Definizione di somma inferiore e superiore. Proprietà delle somme inferiore e superiore. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Integrale esteso ad un intervallo e suo significato geometrico. Integrale definito. Proprietà degli integrali definiti. Teorema della media*. Funzione integrale. Definizione di primitiva di una funzione. Teorema di derivabilità della funzione integrale (di esistenza delle primitive)*. Derivata della funzione integrale con estremi funzioni della variabile indipendente. Teorema fondamentale del calcolo integrale*. Applicazioni degli integrali definiti: calcolo di aree (compreso area racchiusa tra due curve), volumi di solidi di rotazione attorno agli assi x e y , lunghezza di un arco di curva. Teoremi di Guldino. Integrali definiti di funzioni discontinue in qualche punto (integrali generalizzati). Integrali definiti su intervalli di ampiezza infinita (integrali impropri). Caratterizzazione delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Integrali indefiniti immediati di funzioni elementari e funzioni composte. Proprietà di linearità dell'integrale indefinito. Integrazione per sostituzione. Integrazione per parti*. Integrazione delle funzioni razionali fratte. Decomposizione in frazioni semplici: casi con denominatore di primo grado*, di secondo grado* ($\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$) e di grado superiore.

Equazioni differenziali: Definizione di equazione funzionale. Definizione di equazione differenziale. Ordine di un'equazione differenziale, equazioni differenziali lineari, equazioni differenziali omogenee e non omogenee, a coefficienti costanti e variabili. Equazioni differenziali a variabili separabili. Risoluzione di equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee e non, metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Soluzione generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti.

Serie numeriche: Definizione. Carattere di una serie: serie convergenti, divergenti, indeterminate. Serie telescopiche (esempio: serie di Mengoli). Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Controesempio: serie armonica. Serie armonica generalizzata. Serie geometrica e sua somma nel caso di convergenza. Criteri di convergenza per le serie a termini definitivamente positivi: criteri del rapporto e della radice.

Calcolo approssimato: Zeri di una funzione. Metodi numerici per il calcolo degli zeri di una

funzione con il metodo di bisezione*. Metodi numerici per il calcolo di integrali definiti con le formule dei rettangoli* e dei trapezi* e loro errore massimo.

Cerignola, 15 maggio 2023

Il docente
Vittorio Grassi